OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1916. N° 4.

NOTE SUR LES FONCTIONS DE BERNOULLI ET LEUR ANALOGIE AUX FACTORIELLES ORDINAIRES.

PAR

NIELS NIELSEN.

(PRÉSENTÉ DANS LA SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1916.)

Soit $B_m(x)$ la fonction de Bernoulli du rang m, nous avons à étudier le polynome entier du degré m

$$f_m(x) = m!\, B_m(x)\,, \tag{1}$$

qui est régulier, en satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(-1)^m f_m(-x-1) = f_m(x)\,, \tag{2}$$

et qui a évidemment les mêmes zéros que $B_m(x)$, savoir

$$\alpha_1\; \alpha_2\; \alpha_3 \ldots \alpha_m\,, \tag{3}$$

dont la nature a restée presque inconnue jusqu'ici.

Le polynome $f_m(x)$ étant de la forme

$$f_m(x) = x^m + \frac{m}{2}\, x^{m-1} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m}{2}} (-1)^{s-1} \binom{m}{2s} B_s x^{m-2s}\,, \tag{4}$$

où les B_s sont les nombres de Bernoulli, il est évident que les sommes de puissances semblables des racines (3), savoir

$$s_q = \alpha_1^q + \alpha_2^q + \ldots + \alpha_m^q\,, \quad s_0 = m\,, \tag{5}$$

sont à déterminer successivement à l'aide des formules suivantes

$$s_1 = -\frac{m}{2}\,, \tag{6}$$

$$s_2 + \frac{m}{2}\, s_1 + 2\binom{m}{2} B_1 = 0\,, \tag{7}$$

et généralement, pour $4 \leqq 2r \leqq m$, respectivement $3 \leqq 2r+1 \leqq m$,

$$(8)\quad s_{2r}+\frac{m}{2}s_{2r-1}+\sum_{q=1}^{q=r-1}(-1)^{q-1}\binom{m}{2q}B_q s_{2r-2q}-(-1)^r 2r\binom{m}{2r}B_r=0,$$

$$(9)\quad s_{2r+1}+\frac{m}{2}s_{2r}+\sum_{q=1}^{q=r}(-1)^{q-1}\binom{m}{2q}B_q s_{2r-2q+1}=0,$$

formules qui ne sont autre chose que les formules de NEWTON ou bien les conditions générales, communes pour tous les polynomes réguliers du degré m.

Remarquons maintenant que l'ensemble des racines (3) se présentent aussi sous la forme

$$-1-\alpha_1,\quad -1-\alpha_2,\quad \ldots,\quad -1-\alpha_m,$$

il résulte, pour les sommes de puissances s_q, cette autre formule récursive

$$(10)\quad \left((-1)^q-1\right)s_q=\binom{q}{1}s_{q-1}+\binom{q}{2}s_{q-2}+\ldots+\binom{q}{q-1}s_1+m,$$

commune pour tous les polynomes réguliers.

Cela posé, déterminons une suite de polynomes entiers

$$(11)\quad \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_r(x),\ \ldots,$$

de sorte que

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi_0(x)=x, \qquad \varphi_1(x)=-\dfrac{x}{2}, \\ \varphi_2(x)+\dfrac{x}{2}\varphi_1(x)+2\dbinom{x}{2}B_1=0 \end{cases}$$

et généralement

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_{2r}(x)+\dfrac{x}{2}\varphi_{2r-1}(x)+\displaystyle\sum_{s=1}^{s=r-1}(-1)^{s-1}\binom{x}{2s}B_s\varphi_{2r-2s}(x)- \\ \qquad -(-1)^r 2r\dbinom{x}{2r}B_r=0, \end{cases}$$

$$(14)\quad \varphi_{2r+1}(x)+\frac{x}{2}\varphi_{2r}(x)+\sum_{s=1}^{s=r}(-1)^{s-1}\binom{x}{2s}B_s\varphi_{2r-2s+1}(x)=0,$$

puis remplaçons x par le positif entier m, nous aurons toujours

$$\varphi_q(m) = s_q\,, \qquad q \leq m\,, \tag{15}$$

où s_q est la somme de puissances (5); c'est-à-dire que les polynomes $\varphi_r(x)$ satisfont aussi à la condition

$$\left\{\begin{aligned} \left((-1)^q - 1\right)\varphi_q(x) &= \binom{q}{1}\varphi_{q-1}(x) + \binom{q}{2}\varphi_{q-2}(x) + \dots + \\ &\quad + \binom{q}{q-1}\varphi_1(x) + \varphi_0(x)\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

tirée directement de la formule (10).

Quant au polynomes $\varphi_r(x)$, les six premiers deviennent

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x \\ \varphi_1(x) &= -\frac{x}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{x^2}{12} + \frac{x}{6} \\ \varphi_3(x) &= -\frac{x^2}{8} \\ \varphi_4(x) &= -\frac{x^4}{720} + \frac{x^3}{45} + \frac{3x^2}{40} - \frac{x}{30} \\ \varphi_5(x) &= \frac{x^4}{288} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{48}\,, \end{aligned}$$

ce qui nous conduira à énoncer le théorème suivant:

I. Soit $r \geqq 1$, nous aurons généralement

$$\varphi_{2r}(x) = a_{2r,0}\, x^{2r} + a_{2r,1}\, x^{2r-1} + \dots + a_{2r,2r-1}\, x\,, \tag{17}$$

$$\varphi_{2r+1}(x) = a_{2r+1,1}\, x^{2r} + a_{2r+12}\, x^{2r-1} + \dots + a_{2r+1,2r-1} x^2, \tag{18}$$

où les coefficients $a_{2r,s}$ et $a_{2r+1,s}$ sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs ne sont divisibles par aucun nombre premier plus grand que $2r+1$. Nous aurons particulièrement

$$a_{2r,0} = \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} \tag{19}$$

$$a_{2r+1,1} = \frac{(-1)^r (r+\frac{1}{2}) B_r}{(2r)!} \tag{20}$$

$$a_{2r,\,2r-1} = (-1)^{r-1} B_r \tag{21}$$

$$a_{2r+1,\,2r-1} = \frac{(-1)^r (2r+1) B_r}{4r}, \tag{22}$$

En effet, supposons vraies les expressions susdites jusqu'à l'indice $2r-1$, nous avons, en vertu de (13), à déterminer le coefficient $a_{2r,0}$ par la formule

$$a_{2r,0} + \sum_{s=1}^{s=r-1} \frac{(-1)^{s-1} B_s a_{2r-2s,0}}{(2s)!} - \frac{(-1)^r B_r}{(2r-1)!} = 0,$$

savoir

$$(2r)!\, a_{2r,0} = (-1)^{r-1} \sum_{s=1}^{s=r-1} \binom{2r}{2s} B_s B_{r-s} + (-1)^r 2r B_r,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule d'EULER

$$(2r+1) B_r = \sum_{s=1}^{s=r-1} \binom{2r}{2s} B_s B_{r-s},$$

précisément l'expression (19) pour $a_{2r,0}$.

Appliquons ensuite la formule obtenue de (16) en y posant $q = 2r+1$, savoir

$$\left\{\begin{aligned} -2\varphi_{2r+1}(x) &= \binom{2r+1}{1}\varphi_{2r}(x) + \binom{2r+1}{2}\varphi_{2r-1}(x) + \dots + \\ &\quad + \binom{2r+1}{2r}\varphi_1(x) + \varphi_0(x), \end{aligned}\right. \tag{23}$$

il est évident que le polynome $\varphi_{2r+1}(x)$ deviendra précisément du degré $2r$ par rapport à x, et nous aurons immédiatement

$$a_{2r+1,1} = -\left(r + \frac{1}{2}\right) a_{2r,0},$$

ce qui donnera l'expression (20) pour $a_{2r+1,1}$.

Quant aux valeurs des deux derniers coefficients $a_{2r,\,2r-1}$ et $a_{2r+1,\,2r-1}$, il est évident que

$$(-1)^{r-1}\, 2r \binom{x}{2r} B_r, \qquad (-1)^{r-1} \binom{x}{2r} B_r \varphi_1(x) + \frac{x}{2}\varphi_{2r}(x)$$

sont les seuls termes des premiers membres des formules récursives générales (13) et (14) que ne sont divisibles que par x, respectivement par x^2.

Revenons encore une fois à la formule (23), nous verrons que $\varphi_{2r}(x)$ est le seule terme du second membre, qui contient la puissance x^{2r-1}; c'est-à-dire que nous aurons

$$(24) \qquad a_{2r+1,\,2} = -\left(r+\frac{1}{2}\right) a_{2r,\,1}.$$

Soit, dans la même formule (23), $r \geqq 1$, le premier membre est divisible par x^2, tandis que les termes

$$(25) \qquad \binom{2r+1}{1}\varphi_{2r}(x),\ \ldots,\ \binom{2r+1}{2r-1}\varphi_2(x),\ \binom{2r+1}{2r}\varphi_1(x),\ \varphi_0(x),$$

qui figurent au second membre ne sont divisibles que par x; c'est-à-dire que le coefficient complet de x, tiré de ces termes s'évanuira. Introduisons, dans les termes (25), les valeurs des coefficients $a_{2s,\,2s-1}$, indiquées dans (21), nous retrouvons la formule récursive

$$(26) \qquad \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{2r+1}{2s+1} B_{r-s} = (-1)^{r-1}\left(r-\frac{1}{2}\right)$$

la plus ancienne connue pour les nombres de BERNOULLI, savoir la formule de JACQUES BERNOULLI; ce qui donnera du reste une nouvelle démonstration de la formule (21).

Quant à la nature des coefficients $a_{2r,\,s}$ et $a_{2r+1,\,s}$, indiquée dans le théorème I, savoir qu'il sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs ne sont divisibles par aucun nombre premier plus grand que $2r+1$, cette propriété est, en vertu du théorème de VON STAUDT et TH. CLAUSEN, une conséquence directe des formules récursives générales (13) et (14).

Introduisons maintenant, dans $\varphi_q(x)$, le positif entier m au lieu de la variable x, nous retrouvons les sommes de puissances s_q, définies dans la formule (5), ce qui donnera

$$(27) \qquad s_0 = m\,, \quad s_1 = -\frac{m}{2}\,,$$

et généralement pour $2r \leqq m$, respectivement $2r+1 \leqq m$,

$$(28)\quad s_{2r} = \frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r)!} m^{2r} + a_{2r,1} m^{2r-1} + \ldots + (-1)^{r-1} B_r m ,$$

$$(29)\quad \begin{cases} s_{2r+1} = \dfrac{(-1)^r (r+\frac{1}{2}) B_r}{(2r)!} m^{2r} + a_{2r+1,1} m^{2r-1} + \ldots + \\ \qquad + \dfrac{(-1)^r (2r+1) B_r}{4r} m^2. \end{cases}$$

Cela posé, il est evident, que ces sommes de puissances s_q sont très semblables aux sommes de puissances des nombres naturels

$$(30)\qquad s_q(m-1) = 1^q + 2^q + 3^q + \ldots + (m-1)^q .$$

En effet, nous aurons

$$(31)\qquad s_q(m-1) = q!\left(B_{q+1}(m-1) - B_{q+1}(0)\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(32)\quad s_q(m-1) = \frac{m^{q+1}}{q+1} - \frac{m^q}{2} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{q}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{q+1} \binom{q+1}{2s} m^{q-2s+1}.$$

Soit particulièrement le positif entier m égal au nombre premier p, l'analogie des deux fonctions

$$(33)\qquad f_p(x) = p!\, B_p(x) ,$$

$$(34)\qquad \omega_p(x) = x(x+1)\ldots(x+p-1)$$

peut être étendue beaucoup plus loin en remarquant que les $s_q(p-1)$ sont, abstraction faite du signe, précisément les sommes de puissances des zéros de $\omega_p(x)$.

A cet effet, posons

$$(35)\qquad f_p(x) = x^p + \frac{p}{2} x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + c_4 x^{p-4} + \ldots + c_{p-1} x ,$$

$$(36)\qquad \omega_p(x) = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} x ,$$

nous aurons par conséquent

$$(37)\qquad c_{2r} = (-1)^{r-1} \binom{p}{2r} B_r ,$$

tandis que les C_p^s sont les coefficients de factorielles du rang p, de sorte que les formules de NEWTON donnent

$$(38)\quad \begin{cases} s_r(p-1) - C_p^1 s_{r-1}(p-1) + \ldots + \\ \qquad + (-1)^{r-1} C_p^{r-1} s_1(p-1) + (-1)^r r\, C_p^r = 0\,, \end{cases}$$

où il faut supposer $1 \leqq r \leqq p-1$.

Cela posé, il est très facile de démontrer les théorèmes suivants:

II. Soit $p = 2n+1$ un nombre premier plus grand que 3, nous aurons

$$(39)\qquad c_{2r} \equiv C_p^{2r} \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(40)\qquad \frac{c_{2r}}{p} \equiv \frac{C_p^{2r}}{p} \equiv \frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r} \pmod{p},$$

où il faut supposer $1 \leqq r \leqq n-1$.

En effet, les congruences (39) sont des conséquences directes de (37) et (38) combinées par (32) et c'est la même chose pour les congruences (40).

Quant au cas spécial exclu $r = n$, le célèbre théorème de von Staudt et de Th. Clausen donnera

$$(41)\qquad (-1)^n B_n = \frac{1}{p} + \mathfrak{B}_n\,,$$

où $\mathfrak{B}_n$ est un nombre rationnel, dont le déminateur n'est divisible par aucun nombre premier plus grand que $p-2$, ce qui donnera

$$(42)\qquad c_{2n} \equiv C_p^{2n} \equiv -1 \pmod{p}.$$

De plus, nous aurons, en vertu de (37) et (41),

$$(43)\qquad c_{2n} = -1 - p\,\mathfrak{B}_n\,,$$

ce qui donnera

$$(44)\qquad \frac{c_{2n}+1}{p} \equiv -\mathfrak{B}_n \pmod{p}.$$

Posons comme ordinairement

$$(45)\qquad C_p^{2n} = (p-1)! = -1 + pW_p\,,$$

où W_p est le quotient de Wilson, nous aurons

$$(46)\qquad \frac{C_p^{2n}+1}{p} = W_p \equiv -\mathfrak{B}_n - 1 \pmod{p}\,;$$

c'est-à-dire que la congruence (40) est en défaut dans ce cas.

Quant aux sommes de puissances s_{2r} et $s_{2r}(p-1)$, nous aurons

(47) $$s_{2r} \equiv s_{2r}(p-1) \equiv (-1)^{r-1} B_r p \pmod{p^2},$$

ce qui donnera cet autre théorème:

III. Soit $p = 2n+1$ un nombre premier plus grand que 3, nous aurons

(48) $$s_{2r} \equiv s_{2r}(p-1) \equiv 0 \pmod{p},$$

(49) $$\frac{s_{2r}}{p} \equiv \frac{s_{2r}(p-1)}{p} \equiv (-1)^{r-1} B_r \pmod{p},$$

où il faut supposer $1 \leq r \leq n-1$.

Quant au cas spécial $r = n$, nous aurons, en vertu de (41) et (47),

$$s_{2n} \equiv s_{2n}(p-1) \equiv -1 - p\,\mathfrak{B}_n \pmod{p^2},$$

ce qui donnera immédiatement

(50) $$s_{2n} \equiv s_{2n}(p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

(51) $$\frac{s_{2n}+1}{p} \equiv \frac{s_{2n}(p-1)+1}{p} \equiv -\mathfrak{B}_n \pmod{p}.$$

Étudions maintenant les sommes s_{2r+1} et $s_{2r+1}(p-1)$, nous aurons évidemment

(52) $$s_{2r+1} \equiv s_{2r+1}(p-1) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

où il faut supposer $1 \leq r \leq n-1$; cependant il n'existent pas des congruences analogues à (40) et (49).

Or, il est digne de remarque, ce me semble, que les coefficients C_p^{2r+1} représentent des analogies parfaites des sommes de puissances s_{2r+1}.

En effet, nous aurons tout d'abord

$$s_1 = -\frac{p}{2}, \quad C_p^1 = \frac{p(p-1)}{2},$$

ce qui donnera

(53) $$s_1 \equiv C_p^1 \equiv 0 \pmod{p},$$

(54) $$\frac{s_1}{p} \equiv \frac{C_p^1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \pmod{p}.$$

Appliquons ensuite la formule (38), nous aurons immédiatement le théorème suivant:

IV. Soit $p = 2n+1$ un nombre premier plus grand que 3, nous aurons toujours

$$s_{2r+1} \equiv C_p^{2r+1} \equiv 0 \pmod{p^2}, \tag{55}$$

$$\frac{s_{2r+1}}{p^2} \equiv \frac{C_p^{2r+1}}{p^2} \equiv \frac{(-1)^r(2r+1)B_r}{4r} \pmod{p}, \tag{56}$$

où il faut admettre $1 \leq r \leq n-1$.